دکتر غلامرضا یاسی‌پور

بی‌نهایت (۲)

این حکایت گفته شد زیر و زبر
همچو کارِ عاشقان بی‌پا و سر
سر ندارد چون ز ازل بوده است پیش
پا ندارد با ابد بوده است خویش

(مثنوی معنوی/ دفتر اول/ ۹۸ ـ ۲۸۹۷)

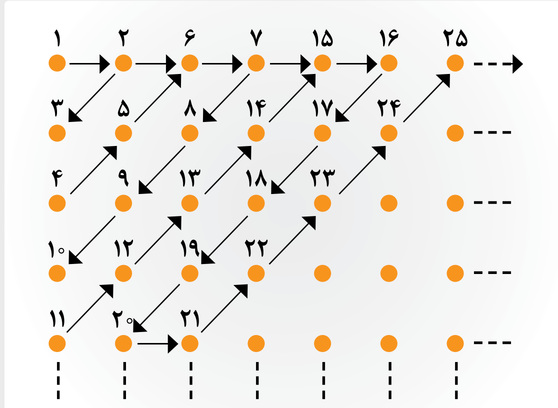
آیا کسرها بی‌نهایت ـ شمارایند؟

مجموعهٔ کسرها، یا Q، به این معنی که می‌توان N را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از Q در نظر گرفت، بزرگ‌تر از N است. اما آیا می‌توان جمیع اعضای Q را در یک فهرست نوشت؟ یعنی، آیا می‌توانیم فهرستی ارائه کنیم که هر کسر (از جمله کسرهای منفی) جایی در آن داشته باشد؟ به نظر می‌رسد، این ایده که مجموعه‌ای به این بزرگی را می‌توان در تناظری یک به یک با N قرار داد، غیرممکن باشد. با این همه، این کار را می‌توان انجام داد.

طریق آغاز این کار، مجسم کردن عبارت‌های دوبُعدی است. برای شروع، ردیفی از همهٔ عددهای تمام، متناوباً مثبت و منفی، می‌نویسیم. سپس زیر آن، همهٔ کسرهایی را می‌نویسیم که مخرجشان ۲ است. اما آن‌هایی را که در سطر بالا ظاهر شده‌اند (مانند $۳ = \frac{۶}{۲}$)، می‌اندازیم. آن‌گاه زیر این سطر، کسرهایی را می‌نویسیم که مخرج ۳ دارند، و بار دیگر آن‌هایی را که قبلاً ثبت کرده‌ایم، حذف می‌کنیم.

کار را به این طریق ادامه می‌دهیم، اما در مورد آن، گرچه هیچ‌گاه پایان نمی‌پذیرد، دقیقاً می‌دانیم که در نمودارمان، هر کسر در کدام مکان ظاهر می‌شود. برای مثال، $\frac{۲۰۹}{۶۷}$ در ردیف ۶۷ام، در حدود ۲۰۰ مکان در سمت راست $\frac{۱}{۶۷}$ قرار دارد.

۱	-۱	۲	-۲	۳	-۳	۴	…
$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	$-\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$	$-\frac{۵}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	…
$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۲}{۳}$	$\frac{۴}{۳}$	$-\frac{۴}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	…
$\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$-\frac{۳}{۴}$	$\frac{۵}{۴}$	$-\frac{۵}{۴}$	$\frac{۷}{۴}$	…
$\frac{۱}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$-\frac{۲}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$	$-\frac{۳}{۵}$	$\frac{۴}{۵}$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…



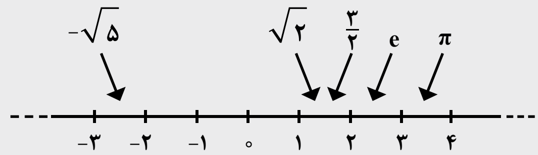
با نمایش همهٔ کسرها در این طریق، دست‌کم بالقوه می‌توانیم فهرستی یک‌بُعدی بنا کنیم. در صورتی که از سطر بالایی شروع کنیم، و در هر مرحله به راست حرکت نماییم، هرگز به سطر دوم نمی‌رسیم. اما با انتخاب یک مسیر پرپیچ و خم زیگزاگی، می‌توان به موفقیت رسید. با شروع از ۱، فهرست خطی معهود، به‌صورت زیر آغاز می‌شود:

$$۱ , -۱ , \frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۳} , -\frac{۱}{۲} , ۲ , -۲$$

که از پیکان‌ها پیروی می‌کند. هر کسر، مثبت یا منفی، در جایی از این فهرست خطی واقع است، و برعکس، موقعیتش جفتش را در فهرست دوبُعدی کسرها به دست می‌دهد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که مجموعهٔ کسرهای Q بی‌نهایت ـ شماراست و نوشت: $\text{card}(Q)=x_۰$.

فهرست کردن عددهای حقیقی

در حالی‌که مجموعهٔ کسرها جواب‌گوی اعضای بسیاری بر محور عددی حقیقی است، عددهای حقیقی‌ای نیز، از قبیل $\sqrt{۲}$، e، π موجودند که کسر نیستند. این عددها، عددهای گنگ‌اند و «رخنه‌ها را پر می‌کنند» تا محور عددی حقیقی R را به دست دهند.



به مجموعهٔ R، با رخنه‌های پر شده، به‌عنوان «پیوستار»[2] رجوع می‌شود. اما چگونه می‌توانیم فهرستی از عددهای حقیقی تشکیل دهیم؟ کانتور، در حرکتی مملو از زیرکی محض، نشان داد که حتی کوشش در قرار دادن عددهای حقیقی بین ۰ و ۱ در یک فهرست، محکوم به شکست است. این پاسخ، بدون شک، به‌صورت شوکی به اشخاصی وارد شد که به فهرست‌سازی معتاد بودند. چرا که درواقع از این به حیرت می‌افتادند که چگونه نمی‌توان مجموعه‌ای از عددها را یکی پس از دیگری نوشت.

فرض می‌کنیم به حرف کانتور اعتقاد نداشته باشید. می‌دانید که هر عدد بین ۰ و ۱ را می‌توان به‌صورت یک دهدهی گسترش یابنده، مثلاً $\frac{۱}{۲} = ۰/۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰...$ و $\frac{۱}{\pi} = ۰/۳۱۸۳۰۹۸۸۶۱۸۳۷۹۰۶۷۱۵۳$ بیان کرد. پس باید به کانتور بگویید: «بفرمایید، این فهرست من از جمیع عددهای بین ۰ و ۱ است»، فهرستی که آن را $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$، $r_۴$، $r_۵$، ... می‌نامیم؛ چه در صورتی که نتوانید چنین کنید، حق با کانتور است.

تصور کنید کانتور به فهرستتان نگاه می‌کند، و عددهای واقع در قطرِ مشخص شده را با حرف سیاه علامت می‌زنند:

$$r_۱ : ۰/a_۱a_۲a_۳a_۴a_۵...$$
$$r_۲ : ۰/b_۱b_۲b_۳b_۴b_۵...$$
$$r_۳ : ۰/c_۱c_۲c_۳c_۴c_۵...$$
$$r_۴ : ۰/d_۱d_۲d_۳d_۴d_۵...$$

اما عدد $x=x_۱x_۲x_۳x_۴x_۵...$ که در آن، $x_۱$ متفاوت از $a_۱$، $x_۲$ متفاوت از $b_۲$، $x_۳$ متفاوت از $c_۳$، و به همین‌گونه در امتداد قطر است، کجاست؟ عدد ایکسِ وی از هر عدد واقع در فهرستتان در یک مکان دهدهی تفاوت دارد، و لذا نمی‌تواند در این فهرست باشد. پس حق با کانتور است.

درواقع، هیچ فهرستی در مورد مجموعهٔ عددهای حقیقی R ممکن نیست، و بنابراین R مجموعهٔ نامتناهی «بزرگ‌تر»ی از مجموعهٔ نامتناهی کسرهای Q است؛ یعنی مجموعه‌ای با مرتبهٔ نامتناهی بالاتر.

*پی‌نوشت‌ها

۱. مطربان رفتند و صوفی در سماع
عشق را آغاز هست انجام نیست

2. continuum